A derivált és a szélsőértékek
(Derivácia a extrémy)

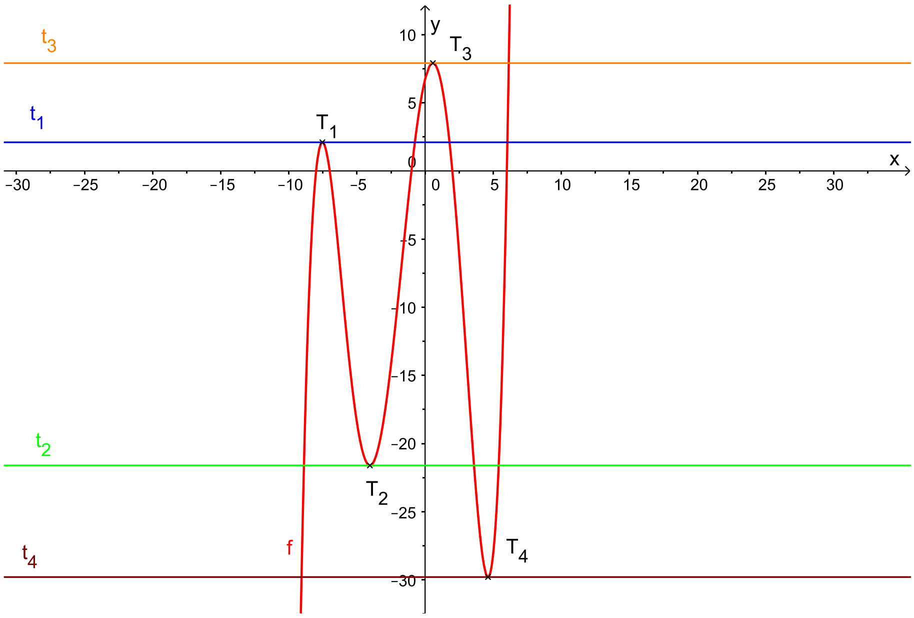
Most próbáljunk találni valami összefüggést a derivált értéke és a szélsőértékek között.

D. Az f függvénynek az x_1 pontban ***lokális minimuma*** (lokálne minimum) van, ha a függvény az $(a_1; b_1)$ nyílt intervallum x_1 pontjában éri el a legkisebb függvényértéket.

$$\exists(a_1; b_1) \subset D_f: x_1 \in (a_1; b_1) \land \forall x \in (a_1; b_1) \setminus \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) < f(x)$$

D. Az f függvénynek az x_2 pontban ***lokális maximuma*** (lokálne maximum) van, ha a függvény az $(a_2; b_2)$ nyílt intervallum x_2 pontjában éri el a legnagyobb függvényértéket.

$$\exists(a_2; b_2) \subset D_f: x_2 \in (a_2; b_2) \land \forall x \in (a_2; b_2) \setminus \{x_2\} \Rightarrow f(x) < f(x_2)$$



A monotonitásnál láttuk, hogy a derivált értéke összefügg a monotonitással – pontosabban annak előjelével. Ha egy függvénynek valamely pontban szélsőértéke van:

- ha ez minimum, akkor a pont előtt csökkenőnek utána pedig növekvőnek kellett lennie
- ha ez maximum, akkor a pont előtt növekvőnek utána pedig csökkenőnek kellett lennie

Ez azt jelenti, hogy a derivált értékei negatív értékekből pozitívakba kell átmenniük vagy fordítva.
De a grafikonon látjuk, hogy az érintők az ilyen pontokban vízszintesek (párhuzamosak az x tengellyel). Az irányszög nagysága nulla. Az iránytényező (mint a nullszög tangense) szintén nulla.

Vagyis a deriváltak értékei a szélsőértékekben nullával egyenlők. Viszont minden olyan pontban, ahol a derivált értéke egyenlő nullával, szélsőérték van? Nézzünk néhány egyszerű példát!

pl.

$$f(x) = x^2$$

deriváljuk

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

találjunk pontot(pontokat), ahol a derivált értéke nulla → oldjuk meg az egyenletet

$$f'(x) = 0$$
$$2x = 0 \qquad /:2$$
$$x_0 = 0$$

elméletileg az x_0 pontban szélsőértéke van – aki ismeri a másodfokú függvényt, tudja, hogy van is neki (globális minimum)

pl.

$$g(x) = x^3$$

deriváljuk

$$g'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

újra zérushelyeket keresünk

$$g'(x) = 0$$

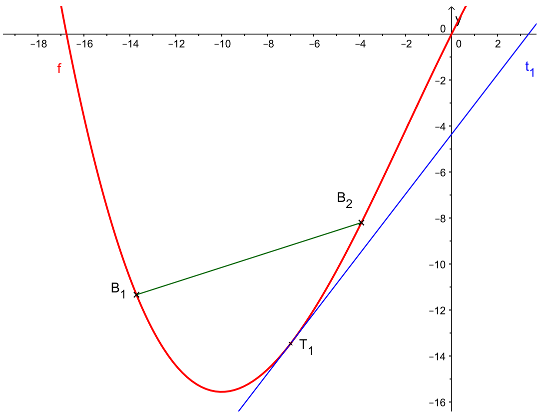
$$3x^2 = 0 \qquad /:3$$
$$x^2 = 0 \qquad /\sqrt{}$$
$$x_0 = 0$$

elméletileg az x_0 pontban szélsőértéke van – aki ismeri a harmadfokú függvényt, tudja, hogy az egész értelmezési tartományon növekvő, és nincs szélsőértéke (a monotonitásnál láthattuk az ábrát – az origó környezetében – hogy viselkedik a függvény: vízszintes érintője van)

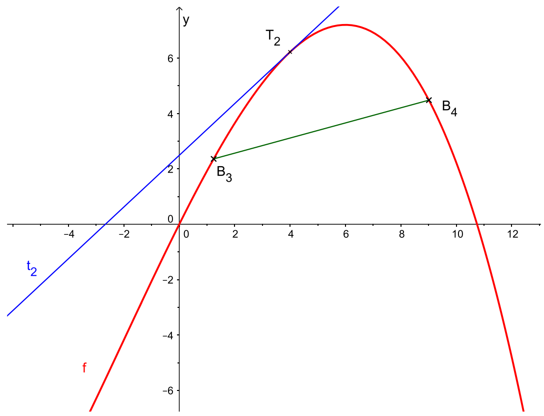
Mije van akkor a harmadfokú függvénynek az $x_0 = 0$ pontban?

D. A függvény (görbe) valamely I_1 intervallumon ***konvex***, ha ezen intervallumon a görbe tetszőleges két pontját összekötő szakasz a görbe felett halad (az intervallum pontjaiban az érintők a görbe alatt vannak).

D. A függvény (görbe) valamely I_2 intervallumon ***konkáv***, ha ezen intervallumon a görbe tetszőleges két pontját összekötő szakasz a görbe alatt halad (az intervallum pontjaiban az érintők a görbe felett vannak).

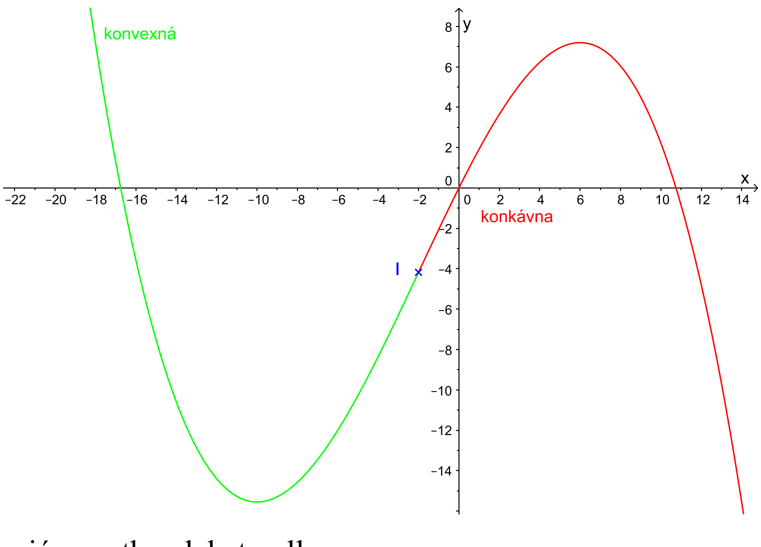


konvex görbe



konkáv görbe

D. A függvény (görbe) konvex és konkáv része közötti határpontját ***inflexiós pont***nak (inflexný bod) nevezzük.



És a derivált értéke az inflexiós pontban lehet nulla.
Vagyis a $g(x) = x^3$ függvénynek az x_0 pontban éppen inflexiós pontja van – a pont előtt a függvény konkáv, utána pedig konvex. A derivált étréke ezért egyenlő nullával.
Foglaljuk össze:

ha a függvénynek szélsőértéke van, akkor ott a derivált értéke nulla

ha a derivált értéke nulla, akkor ott nem szükségszerűen van szélsőérték

T. (szükséges de nem elégséges – žiadúca ale nepostačujúca) Ha az f függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor abban a pontban a derivált értéke egyenlő nullával: $f'(x_0) = 0$.

D. Azokat a pontokat, ahol a függvény deriváltja nulla értéket vesz fel, a függvény ***stacionárius pontjai***nak nevezzük (stacionárne body).

Kell egy tétel, mellyel egyértelműen megállapítható, hogy mely stacionárius pontban van a függvénynek szélsőértéke (elégséges).

D. ***magasabb rendű derivált*** (derivácia vyššieho rádu) – teljes/matematikai indukcióval

$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

a második deriváltat kapjuk, ha az első deriváltat újra deriváljuk

a harmadik deriváltat kapjuk, ha a második deriváltat újra deriváljuk, …

$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$; $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$; $f^{IV}(x) = \left(f'''(x)\right)'$; $f^{V}(x) = \left(f^{IV}(x)\right)'$; …

T. (elégséges – postačujúca) Legyen az f függvény az x_0 pontban n-szer deriválható. Az x_0 pontban az $(n-1)$-edik deriváltig a deriváltak értéke rendre nulla. Ha az n-edik derivált értéke nullától különböző érték, akkor a derivált rendjének párosságától függően mondhatjuk:

- ha n páros szám (páros deriváltnál lett a derivált értéke először nem nulla), akkor az x_0 pontban szélsőértéke van
  - ha a derivált pozitív, akkor az x_0 pontban lokális minimuma van
  - ha a derivált negatív, akkor az x_0 pontban lokális maximuma van
- ha n páratlan szám (páratlan deriváltnál lett a derivált értéke először nem nulla), akkor az x_0 pontban inflexiós pontja van

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$n = 2k\ (k \in \mathbb{N}) \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ az x_0-ban lokális minimuma van

$n = 2k\ (k \in \mathbb{N}) \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ az x_0-ban lokális maximuma van

$n = 2k + 1\ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow$ az x_0-ban inflexiós pontja van

T. Ha a második derivált értéke az I_1 intervallumon pozitív, akkor a függvény az intervallumon konvex.

$\forall x \in I_1$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex az I_1-en

T. Ha a második derivált értéke az I_2 intervallumon negatív, akkor a függvény az intervallumon konkáv.

$\forall x \in I_2$: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkáv az I_2-n

T. Ha az $f''(x_0) = 0$ és az $f'''(x_0) \neq 0$, akkor f függvénynek az x_0 pontban inflexiós pontja van.

példa:

Keressük meg azokat a pontokat, ahol a függvénynek szélsőértéke van, majd határozzuk meg ezek típusát!

a, $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$

b, $g(x) = -x^2 - 6x + 5$

c, $h(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 11$

d, $i(x) = x^4 + 20x^3 + 64x^2 - 192x + 1$

a, először deriváljuk a függvényt

$f'(x) = (5x^2 + 4x - 3)' = 10x + 4$

megkeressük a stacionárius pontjait – egyenletet oldunk meg, hogy hol nulla a függvényérték

$$f'(x) = 0$$
$$10x + 4 = 0 \qquad /-4$$
$$10x = -4 \qquad /:10$$
$$x_0 = -0,4$$

újból deriváljuk

$f''(x) = (10x + 4)' = 10$

behelyettesítjük a második deriváltba a stacionárius pontját

$f''(x_0) = f''(-0,4) = 10$

nullától különböző értéket kaptunk ($f''(x_0) \neq 0$) – a második deriváltnál történt $\Rightarrow$ szélsőértéke van és mivel pozitív az érték ($f''(x_0) > 0$) $\Rightarrow$ az f függvénynek az $x_0 = -0,4$ pontban lokális minimuma van

---

b, először deriváljuk a függvényt

$g'(x) = (-x^2 - 6x + 5)' = -2x - 6$

megkeressük a stacionárius pontjait – egyenletet oldunk meg, hogy hol nulla a függvényérték

$$g'(x) = 0$$
$$-2x - 6 = 0 \qquad /+6$$
$$-2x = 6 \qquad /:(-2)$$

$$x_0 = -3$$

újból deriváljuk

$g''(x) = (-2x - 6)' = -2$

behelyettesítjük a második deriváltba a stacionárius pontját

$g''(x_0) = g''(-3) = -2$

nullától különböző értéket kaptunk ($g''(x_0) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel negatív az érték ($g''(x_0) < 0$) ⇒ a g függvénynek az $x_0 = -3$ pontban lokális maximuma van

---

c, először deriváljuk a függvényt

$h'(x) = (2x^3 + 9x^2 - 24x + 11)' = 6x^2 + 18x - 24$

megkeressük a stacionárius pontjait – egyenletet oldunk meg, hogy hol nulla a függvényérték

$$h'(x) = 0$$

$$6x^2 + 18x - 24 = 0 \qquad /:6$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

gyöktényezők szorzatára tudjuk bontani

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$x_1 = -4$ $\qquad$ $x_2 = 1$

újból deriváljuk

$h''(x) = (6x^2 + 18x - 24)' = 12x + 18$

behelyettesítjük a második deriváltba a stacionárius pontokat (egyszerre csak egyet, és azonnal megpróbáljuk a szélsőérték típusát is meghatározni, amennyiben az van abban a pontban)

$h''(x_1) = h''(-4) = 12.(-4) + 18 = -30$

nullától különböző értéket kaptunk ($h''(x_1) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel negatív az érték ($h''(x_1) < 0$) ⇒ a h függvénynek az $x_1 = -4$ pontban lokális maximuma van

most a másik stacionárius pont következik

$h''(x_2) = h''(1) = 12.1 + 18 = 30$

nullától különböző értéket kaptunk ($h''(x_2) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel pozitív az érték ($h''(x_2) > 0$) ⇒ a h függvénynek az $x_2 = 1$ pontban lokális minimuma van

---

d, először deriváljuk a függvényt

$i'(x) = (x^4 + 20x^3 + 64x^2 - 192x + 1)' = 4x^3 + 60x^2 + 128x - 192$

megkeressük a stacionárius pontjait

$$i'(x) = 0$$

$$4x^3 + 60x^2 + 128x - 192 = 0$$

ez egy harmadfokú egyenlet – ha megtaláljuk az egyik gyökét, akkor a polinomot eloszthatjuk az (x – gyök) kifejezéssel

ezért kis egész számokat helyettesítünk be – ezek között keresve a gyököt

$4.1^3 + 60.1^2 + 128.1 - 192 = 4 + 60 + 128 - 192 = 0$

az első gyök és egyben a függvény stacionárius pontja is az $x_1 = 1$

tehát a többtagú kifejezést eloszthatjuk az $(x - 1)$-gyel – a hányados eggyel alacsonyabb fokú kifejezés lesz (másodfokú)

$(4x^3 + 60x^2 + 128x - 192):(x - 1) = 4x^2 + 64x + 192$

a további stacionárius pontokat a másodfokú egyenlet megoldásaként kapjuk, mert

$4x^3 + 60x^2 + 128x - 192 = (x - 1)(4x^2 + 64x + 192)$

az egyenlet átalakul az alábbi alakra

$(x - 1)(4x^2 + 64x + 192) = 0$

és ez azt jelenti, hogy az egyik tényező egyenlő nullával

$$4x^2 + 64x + 192 = 0 \qquad /:4$$

$x^2 + 16x + 48 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2-4.1.48}}{2.1} = \frac{-16 \pm \sqrt{256-192}}{2} = \frac{-16 \pm 8}{2} = \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow -12 \end{matrix}$$

vagyis a további stacionárius pontok: $x_2 = -4$ és $x_3 = -12$

újból deriváljuk a függvényt

$i''(x) = (4x^3 + 60x^2 + 128x - 192)' = 12x^2 + 120x + 128$

és most sorban behelyettesítjük a stacionárius pontokat

$i''(x_1) = i''(1) = 12.1^2 + 120.1 + 128 = 12 + 120 + 128 = 260$

nullától különböző értéket kaptunk ($i''(x_1) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel pozitív az érték ($i''(x_1) > 0$) ⇒ az i függvénynek az $x_1 = 1$ pontban lokális minimuma van

$i''(x_2) = i''(-4) = 12.(-4)^2 + 120.(-4) + 128 = 192 - 480 + 128 = -160$

nullától különböző értéket kaptunk ($i''(x_2) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel negatív az érték ($i''(x_2) < 0$) ⇒ az i függvénynek az $x_2 = -4$ pontban lokális maximuma van

$i''(x_3) = i''(-12) = 12.(-12)^2 + 120.(-12) + 128 = 1\,728 - 1\,440 + 128 = 416$

nullától különböző értéket kaptunk ($i''(x_3) \neq 0$) – a második deriváltnál történt ⇒ szélsőértéke van és mivel pozitív az érték ($i''(x_3) > 0$) ⇒ az i függvénynek az $x_3 = -12$ pontban lokális minimuma van