Az egyenes és a parabola
(Priamka a parabola)

egyenletrendszert kell megoldanunk

az egyenes egyenlete (lineáris) + a parabola egyenlete (másodfokú)

az összevont egyenlet → másodfokú

az egyenletrendszer megoldásainak száma = az egyenes és a parabola közös pontjainak száma

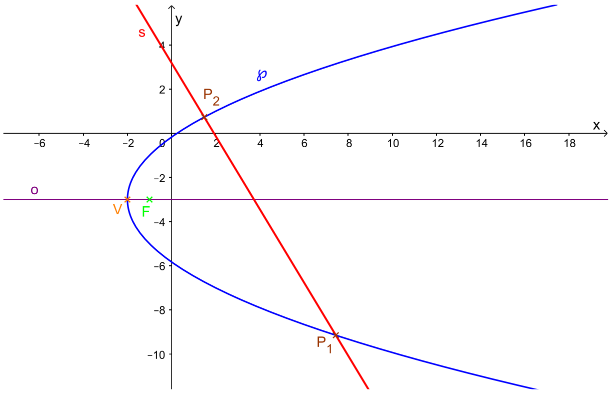
a, két megoldás ⇒ két közös pont ($p \cap \wp = \{P_1; P_2\}$) ⇒ szelő (sečnica)

b, egy megoldás ⇒ egy közös pont ($p \cap \wp = \{B\}$)

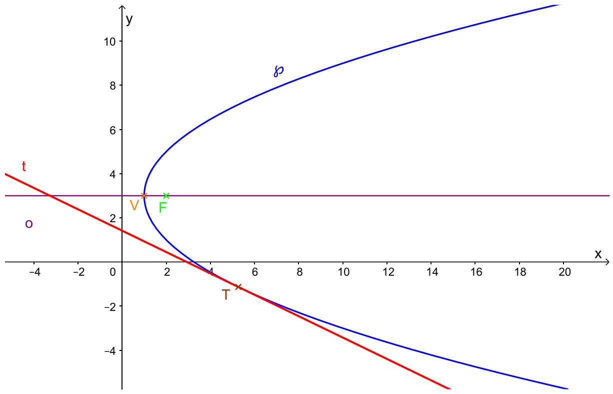
b_1, ha az egyenes nem párhuzamos a tengellyel ($p \nparallel o$) ⇒ érintő (dotyčnica)

b_2, ha az egyenes párhuzamos a tengellyel ($p \parallel o$) ⇒ metsző (sečnica)

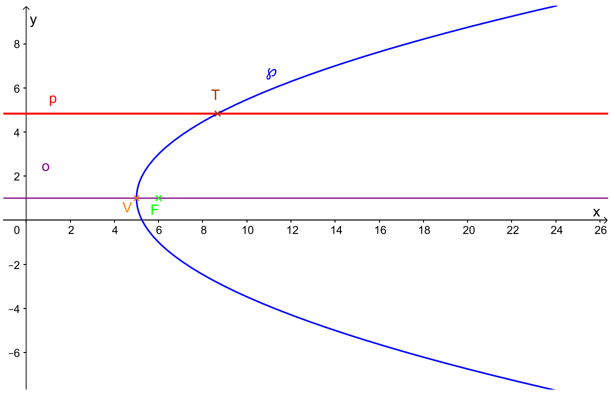
c, nincs megoldása ⇒ nincs közös pont ($p \cap \wp = \emptyset$) ⇒ külső egyenes (nesečnica/vonkajšia priamka)



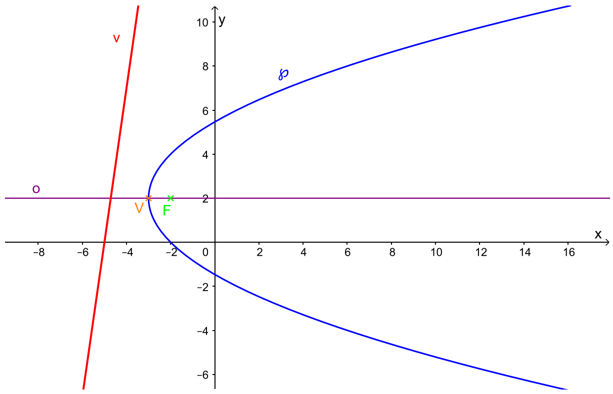
szelő



érintő



metsző



külső egyenes

ha adott a parabola és az érintési pont:

$\wp: (x - u)^2 = \pm 2p(y - v)$; $T(x_0; y_0)$ $\qquad$ $\wp: (y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$; $T(x_0; y_0)$

akkor az adott pontbeli érintő egyenlete:

t: $(x_0 - u).(x - u) = \pm 2p[(y - v) + (y_0 - v)]$ $\qquad$ t: $(y_0 - v).(y - v) = \pm 2p[(x - u) + (x_0 - u)]$

példa:

Határozzuk meg a parabola és az egyenes közös pontjainak koordinátáit:

a, $\wp: x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$
a: $x = -2 + 2t$
$y = 3 - t$

b, $\wp: y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$
b: $y = -2$

c, $\wp: (x + 1)^2 = 6(y - 3)$
c: $2x - 2y + 5 = 0$

b, $\wp: (y + 4)^2 = -5(x + 3)$
d: $y = x - \frac{9}{5}$

a, behelyettesítünk a parabola egyenletébe

$$(-2 + 2t)^2 - 4(-2 + 2t) - 8(3 - t) - 20 = 0$$
$$4 - 8t + 4t^2 + 8 - 8t - 24 + 8t - 20 = 0$$
$$4t^2 - 8t - 32 = 0 \qquad /:4$$
$$t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$(t - 4)(t + 2) = 0$$

$t - 4 = 0$ $\qquad\qquad$ $t + 2 = 0$

$t_1 = 4$ $\qquad\qquad$ $t_2 = -2$

két megoldás ⇒ az a egyenes szelő

$x_1 = -2 + 2.4 = 6$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -2 + 2.(-2) = -6$

$y_1 = 3 - 4 = -1$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 3 - (-2) = 5$

$P_1(6; -1)$; $P_2(-6; 5)$

---

b, $(-2)^2 - 3x - 2(-2) + 7 = 0$

$4 - 3x + 4 + 7 = 0$

$15 - 3x = 0$ $\qquad /+3x$

$15 = 3x$ $\qquad /:3$

$5 = x$

egy megoldása van – lehet a ℘ érintője vagy metsző egyenes

$k_b = 0 = \frac{0}{s_1}$ ⇒ $\overrightarrow{s_b}(s_1; 0)$ ⇒ a b egyenes vízszintes

a parabola fekvő, mivel csak az y koordináta másodfokú ⇒ a parabola tengelye is vízszintes

az egyenes és a tengely párhuzamosak ⇒ a b egyenes metsző

$P(5; -2)$

---

c, $2x - 2y + 5 = 0$ $\qquad /+2y$

$2x + 5 = 2y$ $\qquad /:2$

$x + 2{,}5 = y$

$(x + 1)^2 = 6(x + 2{,}5 - 3)$

$x^2 + 2x + 1 = 6x + 15 - 18$

$x^2 + 2x + 1 = 6x - 3$ $\qquad /-6x + 3$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$(x - 2)^2 = 0$ $\qquad /\sqrt{}$

$|x - 2| = 0$

$x - 2 = 0$ $\qquad /+2$

$x = 2$

egy megoldása van – lehet a ℘ érintője vagy metsző egyenes

$\overrightarrow{n_c}(2; -2)$ ⇒ a c egyenes se nem vízszintes se nem függőleges

az egyenes és a tengely metszők ⇒ a c egyenes érintő

$y = 2 + 2{,}5 = 4{,}5 = \frac{9}{2}$

$T\left(2; \frac{9}{2}\right)$

---

d, $y = x - \frac{9}{5}$ $\qquad /+\frac{9}{5}$

$y + \frac{9}{5} = x$

$(y + 4)^2 = -5\left(y + \frac{9}{5}\right)$

$y^2 + 8y + 16 = -5y - 9$ $\qquad /+5y + 9$

$y^2 + 13y + 25 = 0$

$a = 1$ $\qquad\qquad$ $b = 13$ $\qquad\qquad$ $c = 25$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-13 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.(-48)}}{2.1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} \nearrow \frac{24}{2} = 12 \\ \searrow -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

két megoldás ⇒ a d egyenes szelő

$y_1 = \frac{x^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12$

$y_2 = \frac{x^2}{12} = \frac{(-4)^2}{12} = \frac{4}{3}$

$P_1(12;\,12)$; $P_2\left(-4;\frac{4}{3}\right)$

Határozzuk meg a parabola érintőjének egyenletét a T pontban:

a, $(x+2)^2 = 5(y-5)$; $T(x_T > 0;\, 8{,}2)$ b, $y^2 - 6x + 2y + 19 = 0$; $T(4{,}5;\, y_T < 0)$

a, meghatározzuk az érintési pont hiányzó koordinátáját – behelyettesítjük a parabola egyenletébe

$$(x+2)^2 = 5(8{,}2-5)$$
$$(x+2)^2 = 5.3{,}2$$
$$(x+2)^2 = 16 \qquad /\sqrt{}$$
$$|x+2| = 4$$

$x + 2 = 4$ $x + 2 = -4$

$x_1 = 2$ $x_2 = -6$

T(2; 8,2)

mivel egyedül az egyenes paraméteres egyenlete tartalmazza az illeszkedő pont koordinátáit:

t: $x = 2 + s_1 t$

$y = 8{,}2 + s_2 t$

ahol az érintő irányvektora: $\vec{s}(s_1;\, s_2)$

ha az érintő nem párhuzamos semelyik tengellyel, akkor az egyik koordinátáját megválaszthatjuk (nem 0)

mivel csak az x szerepel a négyzeten, egyszerűbb lesz az összevont egyenlet, ha $s_1 = 1$-et választjuk meg (nem fog tartalmazni $s_1^2.t^2$)

$\vec{s}(1;\, s_2)$

t: $x = 2 + 1.t \; = 2 + t$

$y = 8{,}2 + s_2 t = 8{,}2 + s_2 t$

behelyettesítünk a parabola egyenletébe

$$(2 + t + 2)^2 = 5(8{,}2 + s_2 t - 5)$$
$$(t+4)^2 = 5(3{,}2 + s_2 t)$$

eltüntetjük a zárójeleket és redukáljuk az egyenletet

$$t^2 + 8t + 16 = 16 + 5s_2 t \qquad /-16 - 5s_2 t$$
$$t^2 + 8t - 5s_2 t = 0$$

kiemelünk a két lineáris tagból t-t

$$t^2 + t(8 - 5s_2) = 0$$

$a = 1$ $b = 8 - 5s_2$ $c = 0$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (8-5s_2)^2 - 4.1.0 = (8-5s_2)^2$

$$(8-5s_2)^2 = 0 \qquad /\sqrt{}$$
$$8 - 5s_2 = 0 \qquad /+5s_2$$
$$8 = 5s_2 \qquad /:5$$
$$1{,}6 = s_2$$

így az érintő paraméteres egyenletének a végleges alakja:

t: $x = 2 + t \qquad /.8$

$y = 8{,}2 + 1{,}6t \qquad /.(-5)$

$$8x = 16 + 8t$$
$$-5y = -41 - 8t$$

$8x - 5y = -25$

t: $8x - 5y + 25 = 0$

---

b, $y^2 - 6.4{,}5 + 2y + 19 = 0$

$$y^2 + 2y - 8 = 0$$
$$(y+4)(y-2) = 0$$

$y + 4 = 0$ $y - 2 = 0$

$y_1 = -4$ $y_2 = 2$

T(4,5; 2)

$t\colon x = 4{,}5 + s_1 t$
$\quad y = 2 + s_2 t$
$\vec{s}(s_1;\ 1)$
$t\colon x = 4{,}5 + s_1 t = 4{,}5 + s_1 t$
$\quad y = 2 + 1.t \ = 2 + t$

$$(2 + t)^2 - 6(4{,}5 + s_1 t) + 2(2 + t) + 19 = 0$$
$$4 + 4t + t^2 - 27 - 6s_1 t + 4 + 2t + 19 = 0$$
$$t^2 + t(6 - 6s_1) = 0$$

$a = 1$ $\qquad b = 6 - 6s_1$ $\qquad c = 0$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás $\Leftrightarrow$ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (6 - 6s_1)^2 - 4.1.0 = (6 - 6s_1)^2$

$$(6 - 6s_1)^2 = 0 \qquad /\sqrt{\ }$$
$$6 - 6s_1 = 0 \qquad /+6s_1$$
$$6 = 6s_1 \qquad /:6$$
$$1 = s_1$$

$t\colon x = 4{,}5 + t$
$\quad y = 2 + 1t \qquad /.(-1)$

$x = 4{,}5 + t$
$-y = -2 - t$
$x - y = 2{,}5$

$t\colon 2x - 2y - 5 = 0$

Írjuk fel a parabola azon érintőjének egyenletét, mely párhuzamos az adott egyenessel: $\wp\colon (x + 4)^2 = -4(y - 3)$; p: $3x - y + 1 = 0$

az egyenes általános egyenletéből meghatározzuk az egyenes normálvektorát: $\vec{n}(3;\ -1)$
párhuzamos egyenesek normálvektorai is párhuzamosak → meg is egyezhetnek
ismerjük az érintő normálvektorát ⇒ felírjuk az érintő általános egyenletének előzetes alakját

$t\colon 3x - y + q = 0$

úgy kell meghatároznunk a q értékét, hogy az egyenes érintő legyen (az egyenletrendszernek egy megoldása legyen)
a parabola egyenletéből kifejezzük az y-t és behelyettesítjük az egyenes egyenletébe

$3x + q = y$

$$(x + 4)^2 = -4(3x + q - 3)$$
$$x^2 + 8x + 16 = -12x - 4q + 12 \qquad /+12x + 4q - 12$$
$$x^2 + 20x + 4q + 4 = 0$$

$a = 1$ $\qquad b = 20$ $\qquad c = 4q + 4$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás $\Leftrightarrow$ D = 0

$D = b^2 - 4ac = 20^2 - 4.1.(4q + 4) = 400 - 16q - 16 = 384 - 16q$

$$384 - 16q = 0 \qquad /+16q$$
$$384 = 16q \qquad /:16$$
$$24 = q$$

$t\colon 3x - y + 24 = 0$

Írjuk fel a parabola azon érintőjének egyenletét, mely merőleges az adott egyenesre: $\wp\colon y^2 + 4x - 4y - 16 = 0$; p: $y = -x + 12$

$k_p = -1 \ \Rightarrow\ k_t = -\frac{1}{k_p} = 1$

$t\colon y = 1.x + q$
$\quad y - q = x$

$y^2 + 4(y - q) - 4y - 16 = 0$

$y^2 + 4y - 4q - 4y - 16 = 0$

$y^2 - 4q - 16 = 0$

$a = 1$ $b = 0$ $c = -4q - 16$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás $\Leftrightarrow$ D = 0

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.1.(-4q - 16) = 16q + 64$

$16q + 64 = 0$ /–64

$16q = -64$ /:16

$q = -4$

t: $y = x - 4$