Az egyenes és a hiperbola

(Priamka a hyperbola)

egyenletrendszert kell megoldanunk

az egyenes egyenlete (lineáris) + a hiperbola egyenlete (másodfokú)

az összevont egyenlet → másodfokú

az egyenletrendszer megoldásainak száma = az egyenes és a hiperbola közös pontjainak száma

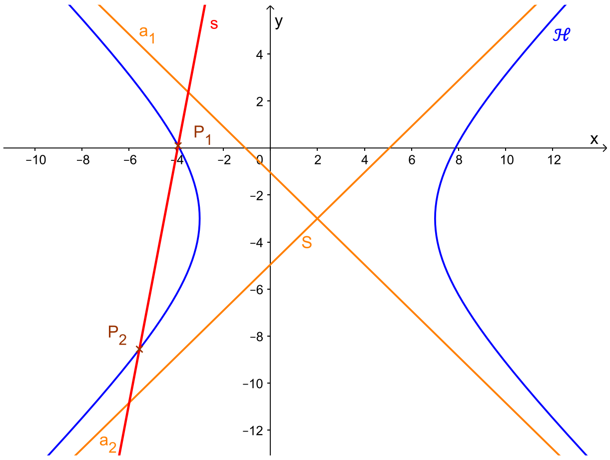
a, két megoldás ⇒ két közös pont ($p \cap \mathcal{H} = \{P_1; P_2\}$) ⇒ szelő (sečnica)

b, egy megoldás ⇒ egy közös pont ($p \cap \mathcal{H} = \{B\}$)

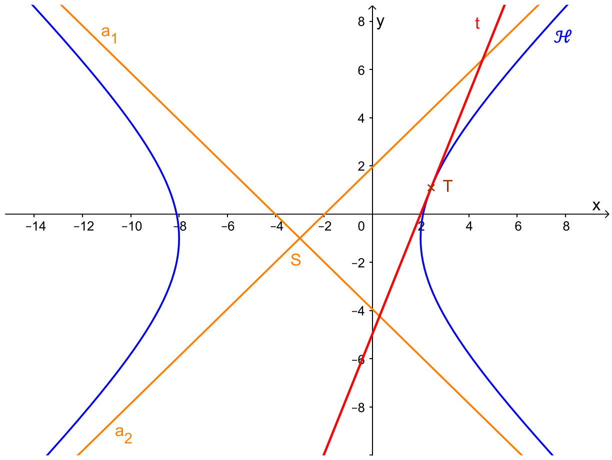
b₁, ha az egyenes nem párhuzamos egyik aszimptotával sem ($p \nparallel a_1, a_2$) ⇒ érintő (dotyčnica)

b₂, ha az egyenes párhuzamos az egyik aszimptotával ($p \parallel a_1 \vee a_2$) ⇒ metsző (sečnica)

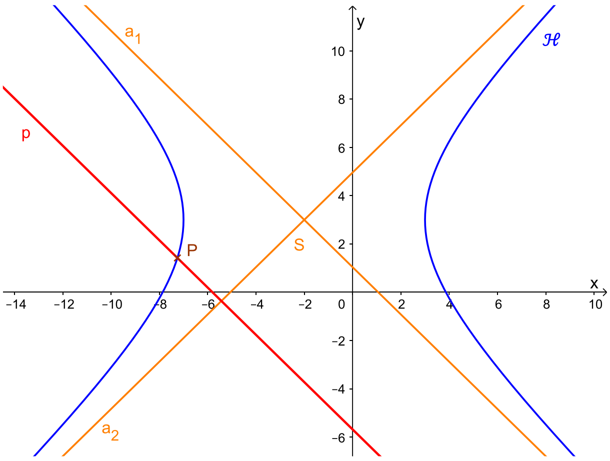
c, nincs megoldása ⇒ nincs közös pont ($p \cap \mathcal{H} = \emptyset$) ⇒ külső egyenes (nesečnica/vonkajšia priamka)



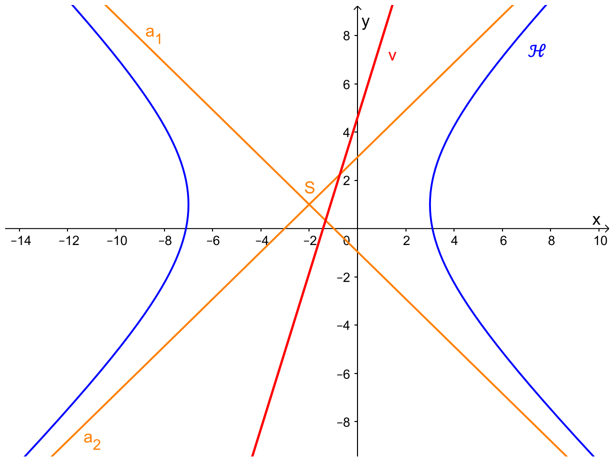
szelő



érintő



metsző



külső egyenes

ha adott a hiperbola és az érintési pont:

$\mathcal{H}: \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$; $T(x_0; y_0)$ $\qquad$ $\mathcal{H}: \frac{(y-v)^2}{a^2} - \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$; $T(x_0; y_0)$

akkor az adott pontbeli érintő egyenlete:

$t: \frac{(x_0-u).(x-u)}{a^2} - \frac{(y_0-v).(y-v)}{b^2} = 1$ $\qquad$ $t: \frac{(y_0-v).(y-v)}{a^2} - \frac{(x_0-u).(x-u)}{b^2} = 1$

példa:

Határozzuk meg a hiperbola és az egyenes közös pontjainak koordinátáit:

a, $\mathcal{H}: 81x^2 - 4y^2 = 324$

a: $y = \frac{45}{14}x - \frac{9}{7}$

b, $\mathcal{H}: x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 21 = 0$

b: $x - 2y - 13 = 0$

c, $\mathcal{H}: \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1$

c: $x = 5 + 9t$

$y = -17 - 20t$

d, $\mathcal{H}: x^2 - y^2 - 10x - 6y + 32 = 0$

d: $7x - 9y - 38 = 0$

a, behelyettesítünk a hiperbola egyenletébe

$$81x^2 - 4.\left(\frac{45}{14}x - \frac{9}{7}\right)^2 = 324$$

négyzetre emeljük

$$81x^2 - 4.\left(\frac{2\,025}{196}x^2 - \frac{810}{98}x + \frac{81}{49}\right) = 324$$

felbontjuk a zárójelet, majd eltüntetjük a törteket

$$81x^2 - \frac{2\,025}{49}x^2 + \frac{1\,620}{49}x - \frac{324}{49} = 324$$

$$\frac{1\,944}{49}x^2 + \frac{1\,620}{49}x - \frac{324}{49} = 324 \qquad /.49$$

$$1\,944x^2 + 1\,620x - 324 = 15\,876 \qquad /-15\,876$$

redukáljuk az egyenletet

$$1\,944x^2 + 1\,620x - 16\,200 = 0 \qquad /:324$$

$$6x^2 + 5x - 50 = 0$$

$a = 6$ $\qquad$ $b = 5$ $\qquad$ $c = -50$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4.6.(-50)}}{2.6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+1\,200}}{12} = \frac{-5 \pm 35}{12} = \begin{cases} \nearrow \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ \searrow -\frac{10}{3} \end{cases}$$

két megoldás ⇒ az a egyenes szelő

$$y_1 = \frac{45}{14}.\frac{5}{2} - \frac{9}{7} = \frac{225}{28} - \frac{9}{7} = \frac{27}{4} = 6{,}75$$

$$y_2 = \frac{45}{14}.\left(-\frac{10}{3}\right) - \frac{9}{7} = -\frac{75}{7} - \frac{9}{7} = -12$$

$P_1\left(\frac{5}{2}; \frac{27}{4}\right)$; $\quad$ $P_2\left(-\frac{10}{3}; -12\right)$

---

b, $x - 2y - 13 = 0$

$$x = 2y + 13$$

$$(2y + 13)^2 - 4y^2 + 2(2y + 13) + 16y + 21 = 0$$

$$4y^2 + 52y + 169 - 4y^2 + 4y + 26 + 16y + 21 = 0$$

$$72y + 216 = 0 \qquad /-216$$

$$72y = -216 \qquad /:72$$

$$y = -3$$

$x = 2.(-3) + 13 = -6 + 13 = 7$

egy megoldása van – lehet a $\mathscr{H}$ érintője vagy metsző egyenes

az aszimptoták meghatározásához az egyenletet középponti alakra hozzuk

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 21 = 0$$

$$x^2 + 2x - 4y^2 + 16y = -21$$

$$x^2 + 2x - 4(y^2 - 4y) = -21$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = -21 + 1.1 - 4.4$$

$$(x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 = -36 \qquad /:(-36)$$

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{36} = 1$$

ennek a hiperbolának a valós tengelye párhuzamos az y tengellyel (az x-et tartalmazó tört előtt negatív az előjel)

ezért az aszimptoták egyenletének iránytényezőjét megkapjuk:

$$k_a = \pm\frac{a}{b} = \pm\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \pm\frac{1}{2}$$

az egyenes általános egyenletéből ismert a normálvektor – ebből az iránytényező

$\overrightarrow{n_b}\,(1; -2) \quad \Rightarrow \quad k_b = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$k_a = k_b$

az egyenes és az egyik aszimptota iránytényezője azonos $\quad \Rightarrow \quad$ a b egyenes metszi a $\mathscr{H}$

P(7; -3)

---

c, $$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1 \qquad /.144$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 5)^2 = 144$$

$$16(5 + 9t - 2)^2 - 9(-17 - 20t + 5)^2 = 144$$
$$16(9t + 3)^2 - 9(-20t - 12)^2 = 144$$
$$16(81t^2 + 54t + 9) - 9(400t^2 + 480t + 144) = 144$$
$$1\,296t^2 + 864t + 144 - 3\,600t^2 - 4\,320t - 1\,296 = 144 \qquad /-144$$
$$-2\,304t^2 - 3\,456t - 1\,296 = 0 \qquad /:(-144)$$
$$16t^2 + 24t + 9 = 0$$

$a = 16$ $\quad b = 24$ $\quad c = 9$

$$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-24\pm\sqrt{24^2-4.16.9}}{2.16} = \frac{-24\pm\sqrt{576-576}}{32} = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4}$$
$$x = 5 + 9.\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{4} = -1{,}75$$
$$y = -17 - 20.\left(-\frac{3}{4}\right) = -2$$

egy megoldása van – lehet a $\mathcal{H}$ érintője vagy metsző egyenes

ennek a hiperbolának a valós tengelye párhuzamos az x tengellyel (az y-t tartalmazó tört előtt negatív az előjel)

ezért az aszimptoták egyenletének iránytényezőjét megkapjuk:

$$k_a = \pm\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \pm\frac{4}{3}$$

az egyenes paraméteres egyenletéből ismert az irányvektor – ebből az iránytényező

$$\overrightarrow{s_c}\,(9; -20) \quad \Rightarrow \quad k_c = \frac{s_2}{s_1} = \frac{-20}{9}$$

$k_a \neq k_c$

az egyenes iránytényezője nem egyezik semelyik aszimptotáéval sem $\Rightarrow$ a c egyenes érintő

$$T\left(-\frac{7}{4}; -2\right)$$

---

d, $\quad 7x - 9y - 38 = 0$
$$7x = 9y + 38$$
$$x = \frac{9y+38}{7}$$

$$\left(\frac{9y+38}{7}\right)^2 - y^2 - 10.\frac{9y+38}{7} - 6y + 32 = 0$$
$$\frac{81y^2+684y+1\,444}{49} - y^2 - \frac{90y+380}{7} - 6y + 32 = 0 \qquad /.49$$
$$81y^2 + 684y + 1\,444 - 49y^2 - 630y - 2\,660 - 294y + 1\,568 = 0$$
$$32y^2 - 240y + 352 = 0 \qquad /:16$$
$$2y^2 - 15y + 22 = 0$$

$a = 2$ $\quad b = -15$ $\quad c = 22$

$$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4.2.22}}{2.2} = \frac{15\pm\sqrt{225-176}}{4} = \frac{15\pm7}{4} = \begin{cases}\nearrow \frac{11}{2} = 5{,}5\\ \searrow 2\end{cases}$$

két megoldás $\Rightarrow$ a d egyenes szelő

$$x_1 = \frac{9.\frac{11}{2}+38}{7} = \frac{25}{2} = 12{,}5$$
$$x_2 = \frac{9.2+38}{7} = 8$$

$$P_1\left(\frac{25}{2}; \frac{11}{2}\right); \quad P_2(8; 2)$$

Határozzuk meg a hiperbola érintőjének egyenletét a T pontban: $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0$; $T\left(x_T > 0; \frac{15}{4}\right)$.

meghatározzuk az érintési pont hiányzó koordinátáját – behelyettesítjük a hiperbola egyenletébe

$$x^2 - 4.\left(\frac{15}{4}\right)^2 + 4x + 24.\frac{15}{4} - 36 = 0$$
$$x^2 - 4.\frac{225}{16} + 4x + 90 - 36 = 0$$
$$x^2 - \frac{225}{4} + 4x + 54 = 0 \qquad /.4$$

$$4x^2 - 225 + 16x + 216 = 0$$
$$4x^2 + 16x - 9 = 0$$

$a = 4$ $\qquad b = 16$ $\qquad c = -9$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-16\pm\sqrt{16^2-4.4.(-9)}}{2.4} = \frac{-16\pm\sqrt{256+144}}{8} = \frac{-16\pm 20}{8} = \begin{cases} \nearrow \frac{1}{2} = 0{,}5 \\ \searrow -\frac{9}{2} = -4{,}5 \end{cases}$$

$T\left(\frac{1}{2};\frac{15}{4}\right)$

mivel egyedül az egyenes paraméteres egyenlete tartalmazza az illeszkedő pont koordinátáit:

$t\colon x = \frac{1}{2} + s_1 t$

$y = \frac{15}{4} + s_2 t$

ahol az érintő irányvektora: $\vec{s}(s_1; s_2)$

ha az érintő nem párhuzamos semelyik tengellyel, akkor az egyik koordinátáját megválaszthatjuk (nem 0)

legyen: $s_2 = 1$

$\vec{s}(s_1; 1)$

$t\colon x = \frac{1}{2} + s_1 t = \frac{1}{2} + s_1 t$

$y = \frac{15}{4} + 1.t = \frac{15}{4} + t$

behelyettesítjük a hiperbola egyenletébe

$$\left(\frac{1}{2} + s_1 t\right)^2 - 4.\left(\frac{15}{4} + t\right)^2 + 4.\left(\frac{1}{2} + s_1 t\right) + 24.\left(\frac{15}{4} + t\right) - 36 = 0$$

négyzetre emeljük és felbontjuk a zárójeleket

$$\frac{1}{4} + s_1 t + s_1^2 t^2 - 4\left(\frac{225}{16} + \frac{15}{2}t + t^2\right) + 2 + 4s_1 t + 90 + 24t - 36 = 0$$
$$\frac{225}{4} + 5s_1 t + s_1^2 t^2 - \frac{225}{4} - 30t - 4t^2 + 24t = 0$$

rendezzük

$$s_1^2 t^2 - 4t^2 - 6t + 5s_1 t = 0$$

párokban kiemelünk t^2-et és t-t, hogy csak egy másodfokú és egy lineáris tag legyen

$$t^2(s_1^2 - 4) + t(-6 + 5s_1) = 0$$

$a = s_1^2 - 4$ $\qquad b = -6 + 5s_1$ $\qquad c = 0$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás $\Leftrightarrow$ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (-6 + 5s_1)^2 - 4.(s_1^2 - 4).0 = (-6 + 5s_1)^2$

$(-6 + 5s_1)^2 = 0$

$-6 + 5s_1 = 0$

$5s_1 = 6$

$s_1 = \frac{6}{5}$

$\vec{s}\left(\frac{6}{5}; 1\right) \sim (6; 5)$

vagyis az érintő paraméteres egyenletének végleges alakja:

$t\colon x = \frac{1}{2} + 6t \qquad /.10$

$y = \frac{15}{4} + 5t \qquad /.(-12)$

$10x = 5 - 60t$

$-12y = -45 + 60t$

$10x - 12y = -40$

$t\colon 5x - 6y + 20 = 0$

Írjuk fel a hiperbola azon érintőjének egyenletét, mely párhuzamos az adott egyenessel:

a, $\mathscr{H}\colon \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ $\qquad$ b, $\mathscr{H}\colon x^2 - 16y^2 - 6x - 64y + 9 = 0$

a: $y = \frac{15}{8}x + 2$ b: $x = -2 + 20t$
$y = 3 + 3t$

az adott egyenessel párhuzamos érintő iránytényezőjének azonosnak kell lenni az egyenesével → csak a konstansban különbözik

felírjuk az érintő iránytényezős egyenletének előzetes alakját

t: $y = \frac{15}{8}x + q$

a q értékét úgy kell meghatároznunk, hogy az egyenes érintő legyen (az egyenletrendszernek egy megoldása legyen)

behelyettesítjük a hiperbola rendezett (a törteket eltüntetve) egyenletébe

$$9(x + 1)^2 - 4(y + 4)^2 = 36$$

$$9(x + 1)^2 - 4.\left(\frac{15}{8}x + q + 4\right)^2 = 36$$

négyzetre emeljük; felbontjuk a zárójeleket; összevonjuk a tagokat és redukáljuk az egyenletet

$$9(x^2 + 2x + 1) - 4.\left(\frac{225}{64}x^2 + q^2 + 16 + \frac{15}{4}qx + 15x + 8q\right) = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - \frac{225}{16}x^2 - 4q^2 - 64 - 15qx - 60x - 32q = 36 \qquad /-36$$

$$-\frac{81}{16}x^2 + x(-42 - 15q) - 4q^2 - 32q - 91 = 0 \qquad /.(-1)$$

$$\frac{81}{16}x^2 + x(42 + 15q) + 4q^2 + 32q + 91 = 0$$

$a = \frac{81}{16}$ $b = 42 + 15q$ $c = 4q^2 + 32q + 91$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$$D = b^2 - 4ac = (42 + 15q)^2 - 4.\frac{81}{16}.(4q^2 + 32q + 91) = 1\,764 + 1\,260q + 225q^2 - 81q^2 - 648q - \frac{7\,371}{4} =$$

$$= 144q^2 + 612q - \frac{315}{4}$$

$$144q^2 + 612q - \frac{315}{4} = 0 \qquad /.\frac{4}{9}$$

$$64q^2 + 272q - 35 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-272\pm\sqrt{272^2-4.64.(-35)}}{2.64} = \frac{-272\pm\sqrt{73\,984+8\,960}}{128} = \frac{-272\pm 288}{128} = \begin{cases} \nearrow \frac{1}{8} = 0{,}125 \\ \searrow -\frac{35}{8} = -4{,}375 \end{cases}$$

t1: $y = \frac{15}{8}x + \frac{1}{8}$ t2: $y = \frac{15}{8}x - \frac{35}{8}$

t1: $15x - 8y + 1 = 0$ t1: $15x - 8y - 35 = 0$

---

b,

t: $x = x_0 + 20t = 0 + 20t$

$y = y_0 + 3t = y_0 + 3t$

$$(20t)^2 - 16(y_0 + 3t)^2 - 6.20t - 64(y_0 + 3t) + 9 = 0$$

$$400t^2 - 16(y_0^2 + 6y_0t + 9t^2) - 120t - 64y_0 - 192t + 9 = 0$$

$$400t^2 - 16y_0^2 - 96y_0t - 144t^2 - 312t - 64y_0 + 9 = 0$$

$$256t^2 + t(-96y_0 - 312) - 16y_0^2 - 64y_0 + 9 = 0$$

$a = 256$ $b = -96y_0 - 312$ $c = -16y_0^2 - 64y_0 + 9$

$$D = b^2 - 4ac = (-96y_0 - 312)^2 - 4.256.(-16y_0^2 - 64y_0 + 9) = 9\,216y_0^2 + 59\,904y_0 + 97\,344 +$$

$$+ 16\,384y_0^2 + 65\,536y_0 - 9\,216 = 25\,600y_0^2 + 125\,440y_0 + 88\,128$$

$$25\,600y_0^2 + 125\,440y_0 + 88\,128 = 0 \qquad /:64$$

$$400y_0^2 + 1\,960y_0 + 1\,377 = 0$$

$$(y_0)_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\,960\pm\sqrt{1\,960^2-4.400.1\,377}}{2.400} = \frac{-1\,960\pm\sqrt{3\,841\,600-2\,203\,200}}{800} =$$

$$= \frac{-1\,960\pm 1\,280}{800} = \begin{cases} \nearrow -\frac{17}{20} = -0{,}85 \\ \searrow -\frac{81}{20} = -4{,}05 \end{cases}$$

t_1: $x = 20t$ $\quad$ /.3

$y = -\frac{17}{20} + 3t$ $\quad$ /. (-20)

$3x = 60t$

$-20y = 17 - 60t$

t_1: $3x - 20y - 17 = 0$

t_2: $x = 20t$ $\quad$ /.3

$y = -\frac{81}{20} + 3t$ $\quad$ /. (-20)

$3x = 60t$

$-20y = 81 - 60t$

t_2: $3x - 20y - 81 = 0$