Permutácie

Permutácie bez opakovania sú vlastne špeciálnym prípadom variácií bez opakovania, kde počet prvkov základnej množiny (n) sa rovná triede (k). To znamená, že vlastne usporiadame celú množinu.

D. ***Permutácie*** (***bez opakovania***) ***n prvkov*** sú všetky usporiadané n-tice vytvorené z n prvkovej množiny, kde prvky sa nemôžu opakovať v jednotlivých n-ticiach. (Permutácie n prvkov sú všetky usporiadania n prvkovej množiny.)

Počet permutácií dostaneme, ak do vzorca na výpočet variácií bez opakovania dosadíme n namiesto k:

$$P(n) = V_n(n) = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-n+1)}_{\text{n činiteľov}} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$$

V. Počet permutácií bez opakovania môžeme vypočítať vzorcom:

$$P(n) = n!$$

Základná množina nemôže obsahovať rovnaké prvky. Ak sú niektoré prvky rovnaké, pri výmene takýchto prvkov nevznikne nová (iná) usporiadaná n-tica. Tieto prípady patria do permutácií s opakovaním.

Máme základnú množinu, ktorá obsahuje niekoľko rovnakých prvkov:

prvok typu 1 sa vyskytuje k_1 krát; prvok typu 2 k_2 krát; … ; prvok typu r k_r krát

platí, že súčet počtu prvkov v tých skupinách dá celkový počet n

$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$

Zoberme jednu permutáciu prvkov (jedno usporiadanie množiny). V jednej skupine (napríklad v skupine i) mám dva rovnaké prvky ($k_i = 2$):

ak práve tieto prvky vymeníme, výsledok je rovnaký ⇒ počet všetkých permutácií bude polovičný

Ak v ďalšej skupine (napríklad v skupine j) mám tri rovnaké prvky ($k_j = 3$):

ak dva z troch prvkov vymeníme, výsledok je rovnaký

ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA – tieto všetky znamenajú tú istú permutáciu

⇒ počet všetkých permutácií bude šestina

Potom počet permutácií bez opakovania treba deliť so súčinom permutácií počtu prvkov v jednotlivých skupinách.

V. Počet permutácií s opakovaním môžeme vypočítať vzorcom:

$$P'_{k_1;k_2;\ldots;k_r}(n) = \frac{n!}{k_1!.k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}$$

P. Ak sú také prvky, ktoré sú iba raz v základnej množine (skupiny s počtom prvkov 1), ich faktoriály (v menovateli vzorca) sa rovnajú jednej. Preto vo vzorci v menovateli stačí vymenovať faktoriály počtu prvkov skupín, ktoré sa nerovnajú jednej (viacčlenné skupiny).

príklad:

Utvorte permutácie bez opakovania z prvkov k, l, m, n.

[k; l; m; n], [k; l; n; m], [k; m; l; n], [k; m; n; l], [k; n; l; m], [k; n; m; l],
[l; k; m; n], [l; k; n; m], [l; m; k; n], [l; m; n; k], [l; n; k; m], [l; n; m; k],
[m; k; l; n], [m; k; n; l], [m; l; k; n], [m; l; n; k], [m; n; k; l], [m; n; l; k],
[n; k; l; m], [n; k; m; l], [n; l; k; m], [n; l; m; k], [n; m; k; l], [n; m; l; k]

Koľko rôznych päťciferných čísel vieme utvoriť z číslic 0; 1; 2; 3; 4, aby číslo bolo deliteľné piatimi?

číslo práve vtedy je deliteľné 5, ak končí nulou alebo päťkou ⇒ na konci bude nula

iba prvé štyri číslice treba usporiadať

P(4) = 4! = 24

Koľkými spôsobmi môžeme usporiadať číslice 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6, aby vzniklo sedemciferné číslo?

nula nemôže byť prvá ⇒ z počtu všetkých usporiadaní odčítame tie, kde je nula prvá

P(7) – P(6) = 7! – 6! = 5 040 – 720 = 4 320

Z koľkých prvkov môžeme utvoriť 3 628 000 permutácií bez opakovania?

P(n) = 3 628 000

$n! = 3\,628\,000$

$$\begin{aligned}
3\,628\,000 : 2 &= 1\,814\,400\\
1\,814\,400 : 3 &= 604\,800\\
604\,800 : 4 &= 151\,200\\
151\,200 : 5 &= 30\,240\\
30\,240 : 6 &= 5\,040\\
5\,040 : 7 &= 720\\
720 : 8 &= 90\\
90 : 9 &= 10\\
10 : 10 &= 1
\end{aligned}$$

$n = 10$

Ak sa zväčší počet n prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií 56-krát. Určte n.

$$\begin{aligned}
P(n+2) &= P(n).56\\
(n+2)! &= n!.56\\
(n+2)(n+1).n! &= n!.56 \qquad /:n!\\
(n+2)(n+1) &= 56\\
n^2 + 3n + 2 &= 56 \qquad /-56\\
n^2 + 3n - 54 &= 0\\
(n+9)(n-6) &= 0
\end{aligned}$$

$n + 9 = 0 \qquad n - 6 = 0$

$n_1 = -9 \qquad n_2 = 6$

Ak sa zväčší počet n prvkov o tri, zväčší sa počet permutácií 1 716-krát. Určte n.

$$\begin{aligned}
P(n+3) &= P(n).1\,716\\
(n+3)! &= n!.1\,716\\
(n+3)(n+2)(n+1).n! &= n!.1\,716 \qquad /:n!\\
(n+3)(n+2)(n+1) &= 1\,716
\end{aligned}$$

po roznásobení by sme dostali rovnicu tretieho stupňa (kubickú), čo nevieme riešiť ale približne rovnakú hodnotu dostaneme, ak krajné činitele nahradíme stredným

$$\begin{aligned}
(n+3)(n+2)(n+1) &\approx (n+2)^3\\
(n+2)^3 &\approx 1\,716 \qquad /\sqrt[3]{\ }\\
n + 2 &\approx 11{,}97\\
n + 2 &= 12\\
n &= 10
\end{aligned}$$

Koľko rôznych sedemciferných čísel vieme utvoriť z číslic 1; 1; 1; 2; 2; 5; 8?

číslice sa opakujú ⇒ budú permutácie s opakovaním

číslica	skupina	počet prvkov
1	k_1	3
2	k_2	2
5	k_3	1
8	k_4	1

počet číslic – $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 7$

$P'_{3;2;1;1}(7) = \frac{7!}{3!.2!.1!.1!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.2} = 420$

Koľko rôznych permutácií má slovo matematika?

niektoré písmená sa opakujú ⇒ budú permutácie s opakovaním
rozdeľme písmená do skupín – ktoré písmeno koľkokrát sa vyskytuje

písmeno	skupina	počet prvkov
m	k_1	2
a	k_2	3

t	k_3	2
e	k_4	1
i	k_5	1
k	k_6	1

počet písmen – n = $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 10$

$P'_{2;3;2;1;1;1}(10) = \frac{10!}{2!.3!.2!.1!.1!.1!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.3!.2} = 151\ 200$