

Priamka a hyperbola

treba riešiť sústavu rovníc

rovnica priamky (lineárna) + rovnica hyperboly (kvadratická)

zlúčená rovnica → kvadratická

počet riešení sústavy = počet spoločných bodov priamky a hyperboly

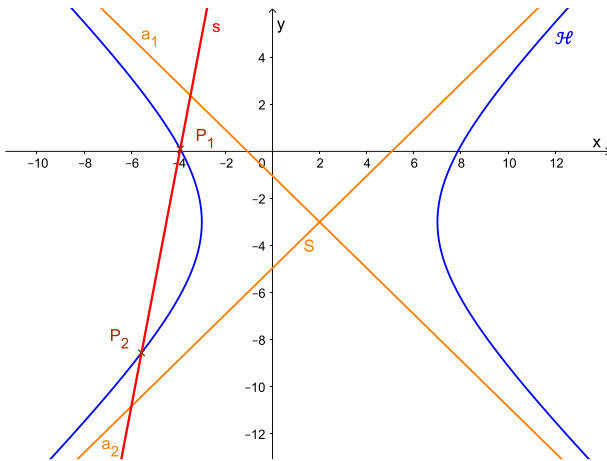
a, dve riešenia ⇒ dva spoločné body ($p \cap \mathcal{H} = \{P_1; P_2\}$) ⇒ **sečnica**

b, jedno riešenie ⇒ jeden spoločný bod ($p \cap \mathcal{H} = \{B\}$)

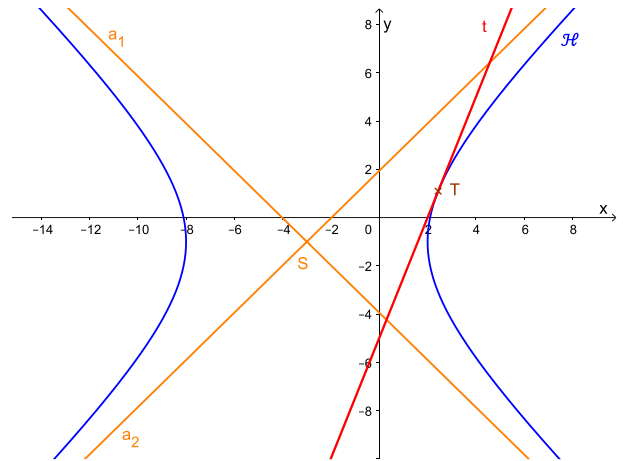
b₁, ak priamka nie je rovnobežná ani jednou z asymptot ($p \nparallel a_1, a_2$) ⇒ **dotyčnica**

b₂, ak priamka je rovnobežná s jednou z asymptot ($p \parallel a_1 \vee a_2$) ⇒ priamka prechádza \mathcal{H} (**sečnica**)

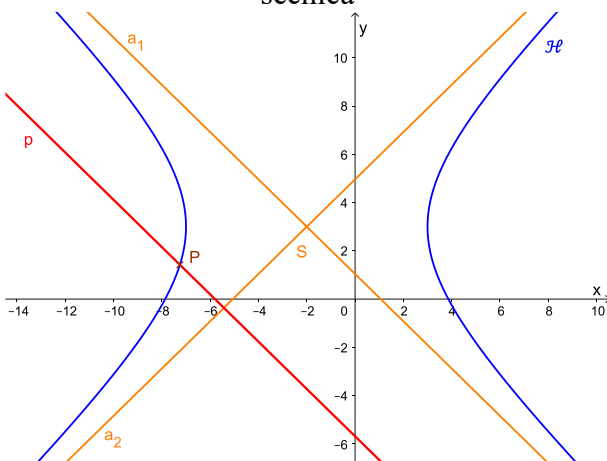
c, nemá riešenie ⇒ nemajú spoločný bod ($p \cap \mathcal{H} = \emptyset$) ⇒ **nesečnica** (vonkajšia priamka)



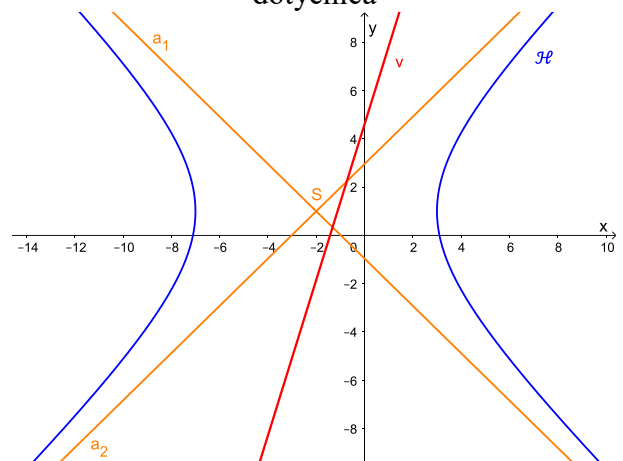
sečnica



dotyčnica



prechádza \mathcal{H}



nesečnica

ak je daná hyperbola a dotykový bod:

$$\mathcal{H}: \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1; T(x_0; y_0)$$

potom rovnica dotyčnice:

$$t: \frac{(x_0-u) \cdot (x-u)}{a^2} - \frac{(y_0-v) \cdot (y-v)}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y-v)^2}{a^2} - \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1; T(x_0; y_0)$$

$$t: \frac{(y_0-v) \cdot (y-v)}{a^2} - \frac{(x_0-u) \cdot (x-u)}{b^2} = 1$$

príklad:

Vypočítajte súradnice priesečníkov hyperboly s priamkou:

a, $\mathcal{H}: 81x^2 - 4y^2 = 324$

a: $y = \frac{45}{14}x - \frac{9}{7}$

c, $\mathcal{H}: \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1$

c: $x = 5 + 9t$
 $y = -17 - 20t$

b, $\mathcal{H}: x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 21 = 0$

b: $x - 2y - 13 = 0$

d, $\mathcal{H}: x^2 - y^2 - 10x - 6y + 32 = 0$

d: $7x - 9y - 38 = 0$

a, dosadíme do rovnice hyperboly

$$81x^2 - 4 \cdot \left(\frac{45}{14}x - \frac{9}{7}\right)^2 = 324$$

umocnime

$$81x^2 - 4 \cdot \left(\frac{2025}{196}x^2 - \frac{810}{98}x + \frac{81}{49}\right) = 324$$

odstránime zátvorku potom zlomky

$$81x^2 - \frac{2025}{49}x^2 + \frac{1620}{49}x - \frac{324}{49} = 324$$

$$\frac{1944}{49}x^2 + \frac{1620}{49}x - \frac{324}{49} = 324 \quad / \cdot 49$$

$$1944x^2 + 1620x - 324 = 15876 \quad / -15876$$

anulujeme rovnicu

$$1944x^2 + 1620x - 16200 = 0 \quad / :324$$

$$6x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$a = 6$$

$$b = 5$$

$$c = -50$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50)}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{12} = \frac{-5 \pm 35}{12} = \frac{7}{2} = 2,5$$

$$\searrow -\frac{10}{3}$$

má dve riešenia \Rightarrow priamka a je sečnicou

$$y_1 = \frac{45}{14} \cdot \frac{5}{2} - \frac{9}{7} = \frac{225}{28} - \frac{9}{7} = \frac{27}{4} = 6,75$$

$$y_2 = \frac{45}{14} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - \frac{9}{7} = -\frac{75}{7} - \frac{9}{7} = -12$$

$$P_1\left(\frac{5}{2}; \frac{27}{4}\right); \quad P_2\left(-\frac{10}{3}; -12\right)$$

$$b, \quad x - 2y - 13 = 0$$

$$x = 2y + 13$$

$$(2y + 13)^2 - 4y^2 + 2(2y + 13) + 16y + 21 = 0$$

$$4y^2 + 52y + 169 - 4y^2 + 4y + 26 + 16y + 21 = 0$$

$$72y + 216 = 0 \quad / -216$$

$$72y = -216 \quad / :72$$

$$y = -3$$

$$x = 2 \cdot (-3) + 13 = -6 + 13 = 7$$

má jedno riešenie – môže byť dotyčnica alebo priamka prechádzajúca \mathcal{H}

na určenie asymptoty upravíme rovnicu na stredový tvar

$$x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 21 = 0$$

$$x^2 + 2x - 4y^2 + 16y = -21$$

$$x^2 + 2x - 4(y^2 - 4y) = -21$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = -21 + 16 - 16 = -11$$

$$(x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 = -36 \quad / :(-36)$$

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{36} = 1$$

táto hyperbola má hlavnú os rovnobežnú s y -ovou osou (pre zlomkom s x je záporné znamienko)

preto smernicu asymptôt dostaneme ako podiel:

$$k_a = \pm \frac{a}{b} = \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \pm \frac{1}{2}$$

zo všeobecnej rovnice priamky poznáme normálový vektor – z toho smernicu

$$\vec{n}_b(1; -2) \Rightarrow k_b = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$k_a = k_b$$

smernica priamky sa rovná smernice jednej z asymptôt \Rightarrow priamka b prechádza \mathcal{H}

$$P(7; -3)$$

$$c, \quad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1 \quad / \cdot 144$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+5)^2 = 144$$

$$16(5+9t-2)^2 - 9(-17-20t+5)^2 = 144$$

$$\begin{aligned}
16(9t+3)^2 - 9(-20t-12)^2 &= 144 \\
16(81t^2 + 54t + 9) - 9(400t^2 + 480t + 144) &= 144 \\
1\ 296t^2 + 864t + 144 - 3\ 600t^2 - 4\ 320t - 1\ 296 &= 144 & /-144 \\
-2\ 304t^2 - 3\ 456t - 1\ 296 &= 0 & /:(-144) \\
16t^2 + 24t + 9 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 16 & b &= 24 & c &= 9 \\
t_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{2 \cdot 16} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32} = \frac{-24}{32} = -\frac{3}{4} \\
x &= 5 + 9 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{4} = -1,75 \\
y &= -17 - 20 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2
\end{aligned}$$

má jedno riešenie – môže byť dotyčnica alebo priamka prechádzajúca \mathcal{H}

táto hyperbola má hlavnú os rovnobežnú s x -ovou osou (pre zlomkom s y je záporné znamienko)

preto smernicu asymptôt dostaneme ako podiel:

$$k_a = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \pm \frac{4}{3}$$

z parametrickej rovnice priamky vieme smerový vektor – z toho smernicu

$$\vec{s}_c(9; -20) \Rightarrow k_c = \frac{s_2}{s_1} = \frac{-20}{9}$$

$$k_a \neq k_c$$

smernica priamky sa nerovná smernice ani jednej z asymptot \Rightarrow priamka c je dotyčnicou

$$T\left(-\frac{7}{4}; -2\right)$$

$$\begin{aligned}
d, \quad 7x - 9y - 38 &= 0 \\
7x &= 9y + 38 \\
x &= \frac{9y+38}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{9y+38}{7}\right)^2 - y^2 - 10 \cdot \frac{9y+38}{7} - 6y + 32 &= 0 \\
\frac{81y^2 + 684y + 1\ 444}{49} - y^2 - \frac{90y+380}{7} - 6y + 32 &= 0 & / \cdot 49 \\
81y^2 + 684y + 1\ 444 - 49y^2 - 630y - 2\ 660 - 294y + 1\ 568 &= 0 \\
32y^2 - 240y + 352 &= 0 & / : 16 \\
2y^2 - 15y + 22 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 2 & b &= -15 & c &= 22 \\
y_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 22}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{4} = \frac{15 \pm 7}{4} = \begin{matrix} \nearrow \frac{11}{2} = 5,5 \\ \searrow 2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

má dve riešenia \Rightarrow priamka d je sečnicou

$$x_1 = \frac{9 \cdot \frac{11}{2} + 38}{7} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$x_2 = \frac{9 \cdot 2 + 38}{7} = 8$$

$$P_1\left(\frac{25}{2}; \frac{11}{2}\right); \quad P_2(8; 2)$$

Napište rovnicu dotyčnice hyperboly v bode $T: x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0; T(x_T > 0; \frac{15}{4})$.

vypočítame chýbajúcu súradnicu dotykového bodu – dosadíme do rovnice hyperboly

$$\begin{aligned}
x^2 - 4 \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^2 + 4x + 24 \cdot \frac{15}{4} - 36 &= 0 \\
x^2 - 4 \cdot \frac{225}{16} + 4x + 90 - 36 &= 0 \\
x^2 - \frac{225}{4} + 4x + 54 &= 0 & / \cdot 4 \\
4x^2 - 225 + 16x + 216 &= 0 \\
4x^2 + 16x - 9 &= 0
\end{aligned}$$

$$a = 4$$

$$b = 16$$

$$c = -9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 144}}{8} = \frac{-16 \pm 20}{8} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} = 0,5 \\ \searrow -\frac{9}{2} = -4,5 \end{matrix}$$

$$T\left(\frac{1}{2}; \frac{15}{4}\right)$$

nakoľko iba parametrická rovnica priamky obsahuje súradnice bodu, ktorým prechádza:

$$t: x = \frac{1}{2} + s_1 t$$

$$y = \frac{15}{4} + s_2 t$$

kde smerový vektor dotyčnice je: $\vec{s}(s_1; s_2)$

ak dotyčnica nie je rovnobežná ani jednou z ôs, jednu súradnicu si môžeme zvolit' (nie 0)

nech: $s_2 = 1$

$$\vec{s}(s_1; 1)$$

$$t: x = \frac{1}{2} + s_1 t = \frac{1}{2} + s_1 t$$

$$y = \frac{15}{4} + 1 \cdot t = \frac{15}{4} + t$$

dosadíme do rovnice hyperboly

$$\left(\frac{1}{2} + s_1 t\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{15}{4} + t\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + s_1 t\right) + 24 \cdot \left(\frac{15}{4} + t\right) - 36 = 0$$

umocníme a odstránime zátvorky

$$\frac{1}{4} + s_1 t + s_1^2 t^2 - 4 \left(\frac{225}{16} + \frac{15}{2} t + t^2\right) + 2 + 4s_1 t + 90 + 24t - 36 = 0$$

$$\frac{225}{4} + 5s_1 t + s_1^2 t^2 - \frac{225}{4} - 30t - 4t^2 + 24t = 0$$

preusporiadame

$$s_1^2 t^2 - 4t^2 - 6t + 5s_1 t = 0$$

vyjmeme vo dvojiciach t^2 a t , aby bol iba jeden kvadratický a jeden lineárny člen

$$t^2(s_1^2 - 4) + t(-6 + 5s_1) = 0$$

$$a = s_1^2 - 4$$

$$b = -6 + 5s_1$$

$$c = 0$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D : jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-6 + 5s_1)^2 - 4 \cdot (s_1^2 - 4) \cdot 0 = (-6 + 5s_1)^2$$

$$(-6 + 5s_1)^2 = 0$$

$$-6 + 5s_1 = 0$$

$$5s_1 = 6$$

$$s_1 = \frac{6}{5}$$

$$\vec{s}\left(\frac{6}{5}; 1\right) \sim (6; 5)$$

takže konečný tvar parametrickej rovnice dotyčnice:

$$t: x = \frac{1}{2} + 6t \quad / \cdot 10$$

$$y = \frac{15}{4} + 5t \quad / \cdot (-12)$$

$$10x = 5 - 60t$$

$$-12y = -45 + 60t$$

$$10x - 12y = -40$$

$$t: 5x - 6y + 20 = 0$$

Napíšte rovnicu dotyčnice k hyperbole, ktorá je rovnobežná s danou priamkou:

$$a, \mathcal{H}: \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

$$b, \mathcal{H}: x^2 - 16y^2 - 6x - 64y + 9 = 0$$

$$a: y = \frac{15}{8}x + 2$$

$$b: x = -2 + 20t$$

$$y = 3 + 3t$$

priamka, ktorá má byť rovnobežná s danou priamkou, musí mať smernicu rovnakú \rightarrow líši sa iba v konštante

píšeme predbežný tvar smernicovej rovnice dotyčnice

$$t: y = \frac{15}{8}x + q$$

treba určiť hodnotu q tak, aby priamka bola dotyčnicou (aby sústava mala jedno riešenie)
dosadíme do upravenej rovnice hyperboly \rightarrow odstránime zlomky

$$9(x+1)^2 - 4(y+4)^2 = 36$$

$$9(x+1)^2 - 4\left(\frac{15}{8}x + q + 4\right)^2 = 36$$

umocníme; odstránime zátvorku; zlúčime členy a anulujeme rovnicu

$$9(x^2 + 2x + 1) - 4\left(\frac{225}{64}x^2 + q^2 + 16 + \frac{15}{4}qx + 15x + 8q\right) = 36$$

$$9x^2 + 18x + 9 - \frac{225}{16}x^2 - 4q^2 - 64 - 15qx - 60x - 32q = 36 \quad /-36$$

$$-\frac{81}{16}x^2 + x(-42 - 15q) - 4q^2 - 32q - 91 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\frac{81}{16}x^2 + x(42 + 15q) + 4q^2 + 32q + 91 = 0$$

$$a = \frac{81}{16}$$

$$b = 42 + 15q$$

$$c = 4q^2 + 32q + 91$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D : jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (42 + 15q)^2 - 4 \cdot \frac{81}{16} \cdot (4q^2 + 32q + 91) = 1\,764 + 1\,260q + 225q^2 - 81q^2 - 648q - \frac{7\,371}{4} =$$

$$= 144q^2 + 612q - \frac{315}{4}$$

$$144q^2 + 612q - \frac{315}{4} = 0 \quad / \cdot \frac{4}{9}$$

$$64q^2 + 272q - 35 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-272 \pm \sqrt{272^2 - 4 \cdot 64 \cdot (-35)}}{2 \cdot 64} = \frac{-272 \pm \sqrt{73\,984 + 8\,960}}{128} = \frac{-272 \pm 288}{128} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{8} = 0,125 \\ \searrow -\frac{35}{8} = -4,375 \end{matrix}$$

$$t_1: y = \frac{15}{8}x + \frac{1}{8}$$

$$t_2: y = \frac{15}{8}x - \frac{35}{8}$$

$$t_1: 15x - 8y + 1 = 0$$

$$t_1: 15x - 8y - 35 = 0$$

b,

$$t: x = x_0 + 20t = 0 + 20t$$

$$y = y_0 + 3t = y_0 + 3t$$

$$(20t)^2 - 16(y_0 + 3t)^2 - 6 \cdot 20t - 64(y_0 + 3t) + 9 = 0$$

$$400t^2 - 16(y_0^2 + 6y_0t + 9t^2) - 120t - 64y_0 - 192t + 9 = 0$$

$$400t^2 - 16y_0^2 - 96y_0t - 144t^2 - 312t - 64y_0 + 9 = 0$$

$$256t^2 + t(-96y_0 - 312) - 16y_0^2 - 64y_0 + 9 = 0$$

$$a = 256$$

$$b = -96y_0 - 312$$

$$c = -16y_0^2 - 64y_0 + 9$$

$$D = b^2 - 4ac = (-96y_0 - 312)^2 - 4 \cdot 256 \cdot (-16y_0^2 - 64y_0 + 9) = 9\,216y_0^2 + 59\,904y_0 + 97\,344 +$$

$$+ 16\,384y_0^2 + 65\,536y_0 - 9\,216 = 25\,600y_0^2 + 125\,440y_0 + 88\,128$$

$$25\,600y_0^2 + 125\,440y_0 + 88\,128 = 0 \quad /:64$$

$$400y_0^2 + 1\,960y_0 + 1\,377 = 0$$

$$(y_0)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1\,960 \pm \sqrt{1\,960^2 - 4 \cdot 400 \cdot 1\,377}}{2 \cdot 400} = \frac{-1\,960 \pm \sqrt{3\,841\,600 - 2\,203\,200}}{800} =$$

$$= \frac{-1\,960 \pm 1\,280}{800} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{17}{20} = -0,85 \\ \searrow -\frac{81}{20} = -4,05 \end{matrix}$$

$$t_1: x = 20t \quad / \cdot 3$$

$$y = -\frac{17}{20} + 3t \quad / \cdot (-20)$$

$$3x = 60t$$

$$-20y = 17 - 60t$$

$$t_1: 3x - 20y - 17 = 0$$

$$t_2: x = 20t \quad / \cdot 3$$

$$y = -\frac{81}{20} + 3t \quad / \cdot (-20)$$

$$3x = 60t$$

$$-20y = 81 - 60t$$

$$t_2: 3x - 20y - 81 = 0$$

