4. domáce kolo ŠML - riešenia

1. úloha – 5. roč.

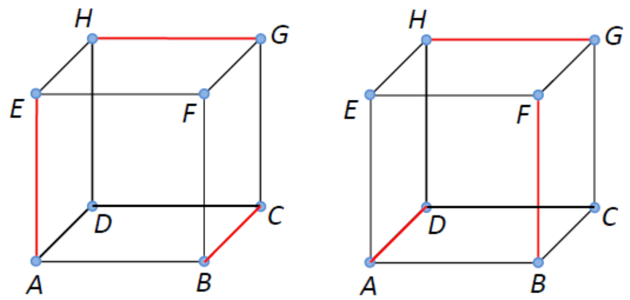
Každé dieťa triafalo do terča dvakrát. Lívia získala 4 body. Tie získala zasiahnutím polí s hodnotou 1 a 3 body, keďže každý zásah bol podľa zadania do iného políčka. Alenka získala 7 bodov. Tie mohla získať zasiahnutím polí s hodnotou 1 a 6 bodov, 2 a 5 bodov alebo 3 a 4 body. Polia s hodnotou 1 a 3 body trafila Lívia, takže Alenka musela trafiť polia s hodnotou 2 a 5 bodov. Roman získal 11 bodov. Tie mohol získať zasiahnutím polí s hodnotou 1 a 10 bodov, 2 a 9 bodov, 3 a 8 bodov, 4 a 7 bodov alebo 5 a 6 bodov. Polia s hodnotou 1 a 3 body trafila Lívia, polia s hodnotou 2 a 5 bodov trafila Alenka, takže Roman musel trafiť polia s hodnotou 4 a 7 bodov. Iva získala 16 bodov. Tie mohla získať zasiahnutím polí 6 a 10 bodov alebo 7 a 9 bodov. Pole s hodnotou 7 bodov trafil Roman, takže Iva musela trafiť polia s hodnotou 6 a 10 bodov. Vlado trafil polia s hodnotou 8 a 9 bodov a získal 17 bodov.
a) Políčka, do ktorých trafila Alenka, mali hodnotu 2 a 5 bodov. b) Políčka, do ktorých trafil Vlado, mali hodnotu 8 a 9 bodov.

2. úloha – 5. roč.

Rebeke sa do knižnice nezmestila tretina jej kníh. Tie rozložila na tri poličky a stôl. Na tri poličky dala po 7 kníh, na stôl položila 2 knihy. Na poličky a stôl dala spolu 3.7 + 2 = 23 kníh. Tie tvoria tretinu jej kníh. **Rebeka má spolu** 3.23 = **69 kníh.**

3. úloha – 5. roč. (1. úloha – 6. roč.)

Kocka má 6 stien a 12 hrán. Každá hrana je spoločná pre 2 steny. Každá stena kocky mala mať aspoň 1 hranu červenú. Jednou červenou paličkou vieme túto podmienku splniť pre 2 hrany naraz. Ak budeme červené paličky ukladať rozumne, aby sme zbytočne nedávali viac červených paličiek na jednu stenu, stačia nám 6:2 = 3 červené paličky (obr.).



Na obrázku sú kocky s troma červenými paličkami, pričom jedna z nich tvorí hranu *HG* a spĺňa teda podmienku pre vrchnú a zadnú stenu kocky. Zvyšné dve červené paličky musia tvoriť hranu prednej, spodnej, ľavej a pravej steny. Tieto steny si vieme rozdeliť do dvojíc tak, aby v každej dvojici boli susedné steny, dvoma spôsobmi:

1. ľavá a predná stena (červená hrana *AE*), pravá a spodná stena (červená hrana *BC*),
2. ľavá a spodná stena (červená hrana *AD*), pravá a predná stena (červená hrana *BF*).

Na obrázkoch sú obe riešenia.
a) Peter musí použiť najmenej 3 červené paličky.
b) Z červených paličiek ešte musí vyrobiť buď hrany *AE* a *BC*, alebo hrany *AD* a *BF*.

4. úloha – 5. roč. (2. úloha – 6. roč.)

Šesť psov a jeden kohút majú spolu 6.4 + 1.2 = 26 nôh. Liparid je vymyslené zviera, počet jeho nôh musí byť vyjadrený prirodzeným číslom. Keďže liparidov je sedem, musí byť počet nôh siedmich liparidov násobkom čísla 7.

Karol tvrdil, že šesť psov, jeden kohút a sedem liparidov má spolu 46 nôh. Teda podľa Karola by sedem liparidov muselo mať 46 – 26 = 20 nôh. Číslo 20 nie je násobkom čísla 7, teda Karol nemal pravdu.

Podobne overíme, ktoré z ostatných detí mohlo mať pravdu. Do tabuľky zapíšeme, koľko nôh priradili jednotlivé deti celej skupine zvierat a koľko siedmim liparidom a skontrolujeme, ktorý z týchto počtov je násobkom čísla 7.

	Karol	**Linda**	**Majka**	**Nina**	**Ondro**
počet nôh spolu	46	52	66	78	82
počet nôh liparidov	20	26	40	52	**56**

Jedine číslo 56 je násobkom čísla 7, teda pravdu mal Ondro. Jeden liparid má 56 : 7 = 8 nôh.
Liparid má 8 nôh.

3. úloha – 6. roč. (1. úloha – 7. roč.)

V slovách NOETIS, POSDUL a KARTAS sú tri písmená na správnom mieste, v slove POETUR štyri písmená. Napíšme si slová pod seba do tabuľky, aby sme videli v ktorých písmenách sa líšia.

Slová POSDUL a KARTAS sa nezhodujú v žiadnom písmene, t. j. nemajú rovnaké písmeno na rovnakom mieste. V oboch sú správne umiestnené 3 písmená. Zatiaľ nevieme, ktoré to sú, avšak vieme, že tie 3 písmená, ktoré sú správne v slove POSDUL, budú v slove KARTAS nesprávne a naopak.

Hoci nevieme, ktoré písmená sú správne v ktorom z týchto dvoch slov, vieme povedať, že heslo je iba „kombináciou" týchto dvoch slov. Niektoré tri písmená treba vziať zo slova POSDUL a zvyšné tri zo slova KARTAS. Na prvom mieste v hesle bude buď písmeno P alebo K, na druhom mieste bude buď písmeno O alebo A atď. Zapíšme si aj túto informáciu do tabuľky.

V slove POETUR je na 3. mieste písmeno E. My však vieme, že v správnom hesle je na 3. mieste buď písmeno S (zo slova POSDUL) alebo písmeno R (zo slova KARTAS). V slove POETUR je teda nesprávne písmeno E. Rovnakou úvahou prídeme na to, že nesprávne je aj písmeno R na 6. mieste. Ostatné písmená v slove POETUR sú správne. Už teda vieme, že heslo má tvar PO_TU_.

Od slova POSDUL sa líši v písmene D na 4. mieste, zvyšné 3 známe písmená sú správne. V slove POSDUL musia byť teda nesprávne písmená S (na 3. mieste) a L (na 6. mieste). V hesle sme mali doteraz na 3. mieste na výber medzi písmenami S a R, teraz už vieme, že písmeno S na tomto mieste je nesprávne a teda v hesle musí byť na 3. mieste písmeno R. Rovnakou úvahou zistíme, že na 6. mieste v hesle musí byť písmeno S.

Správne heslo je PORTUS. V tabuľke je prehľadne zhrnuté, v ktorých písmenách (vyznačené červenou) sa jednotlivé tipy líšia od správneho hesla.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	počet správnych písmen
1. tip	N	O	E	T	I	S	3
2. tip	P	O	S	D	U	L	3
3. tip	K	A	R	T	A	S	3
4. tip	P	O	E	T	U	R	4
heslo	P/K	O/A	S/R	D/T	U/A	L/S	6
	P	**O**	**R**	**T**	**U**	**S**	

Tibor si vymyslel slovo PORTUS.

4. **úloha – 6. roč. (2. úloha – 7. roč.)**

Prvý turista sa ubytoval v izbe číslo 50 na štvrtom poschodí.
Ak by to bola izba „na začiatku poschodia“, tak väčšina z 50 izieb by bola na troch spodných poschodiach. Číslo 49 nie je deliteľné 3, no číslo 48 je. Na každom z prvých troch poschodí by bolo 48:3 = 16 izieb, na štvrtom poschodí by izby začínali číslami 49 a 50.
Ak by to bola izba „na konci poschodia“, tak na štvrtom poschodí by už nebolo veľa ďalších izieb. Číslo 50 nie je deliteľné 4, no číslo 52 je. Na každom z prvých štyroch poschodí by bolo 52:4 = 13 izieb, izby na štvrtom poschodí by končili číslami 50, 51, 52.
Už je teda jasné, že počet izieb na jednotlivých poschodiach sa musí pohybovať v intervale od 13 do 16.
Druhý turista sa ubytoval v izbe číslo 100 na siedmom poschodí.
Ak by to bola izba „na začiatku poschodia“, tak väčšina zo 100 izieb by bola na šiestich spodných poschodiach. Číslo 99 nie je deliteľné 6, no číslo 96 je. Na každom z prvých šiestich poschodí by bolo 96:6 = 16 izieb, na siedmom poschodí by izby začínali číslami 97, 98, 99 a 100.
Ak by to bola izba „na konci poschodia“, tak na siedmom poschodí by už nebolo veľa ďalších izieb. Číslo 100 nie je deliteľné 7, no číslo 105 je. Na každom z prvých siedmich poschodí by bolo 105:7 = 15 izieb, izby na siedmom poschodí by končili číslami 100, 101, 102, 103, 104, 105.
Z toho výplýva, že počet izieb na jednotlivých poschodiach musí byť buď 15 alebo 16.
Tretí turista sa ubytoval v izbe číslo 126 na deviatom poschodí.
Ak by to bola izba „na začiatku poschodia“, tak väčšina zo 126 izieb by bola na ôsmich spodných poschodiach. Číslo 125 nie je deliteľné 8, no číslo 120 je. Na každom z prvých ôsmich poschodí by bolo 120:8 = 15 izieb, na deviatom poschodí by izby začínali číslami 121, 122, 123, 124, 125, 126.
Ak by to bola izba „na konci poschodia“, tak na deviatom poschodí by už nebolo veľa ďalších izieb. Číslo 126 je deliteľné 9 bezo zvyšku. Na každom z prvých deviatich poschodí by bolo 126:9 = 14 izieb, posledná by bola izba číslo 126.
Z toho výplýva, že počet izieb na jednotlivých poschodiach musí byť buď 14 alebo 15.
Na počet izieb na jednotlivých poschodiach máme **3 podmienky:**

1. musí ich byť od 13 do 16 (vrátane)
2. musí ich byť buď 15 alebo 16.
3. musí ich byť od 14 alebo 15.

Jedine číslo 15 spĺňa všetky podmienky. Na každom poschodí je teda 15 izieb. Ich čísla sú uvedené v tabuľke.
Na každom poschodí je 15 izieb.

poschodie	**izby**
1.	1 až 15
2.	16 až 30
3.	31 až 45
4.	46 až 60
5.	61 až 75
6.	76 až 90
7.	91 až 105
8.	106 až 120
9.	121 až 135
...	...

3. **úloha – 7. roč. (1. úloha – 8. roč.)**

Ak chceme z košíka po tme s istotou vybrať žltú loptičku, musíme z neho vytiahnuť najmenej 19 loptičiek. Mohlo by sa nám stať, že máme smolu a prvých 18 vytiahnutých loptičiek má inú farbu ako žltú. Keďže po vytiahnutí 19 loptičiek máme istotu, že niektorá z nich je žltá, znamená to, že všetky ďalšie loptičky v košíku sú žlté. Z 30 loptičiek v košíku má 18 loptičiek inú ako žltú farbu. Žltú farbu má 30 – 18 = 12 loptičiek.
Ak chceme s istotou vybrať zelenú loptičku, musíme vytiahnuť aspoň 20 loptičiek. To znamená, že 19 loptičiek má inú farbu ako zelenú a teda zelených loptičiek je 30 – 19 = 11.
Všetkých loptičiek je 30, teda modrých je 30 – (12 + 11) = 7.
Ak by sme mali veľkú smolu, mohlo by sa nám stať, že najskôr z košíka vytiahneme 12 žltých a 11 zelených loptičiek. To už by sme mali 12 + 11 = 23 loptičiek a stále by medzi nimi nebola žiadna

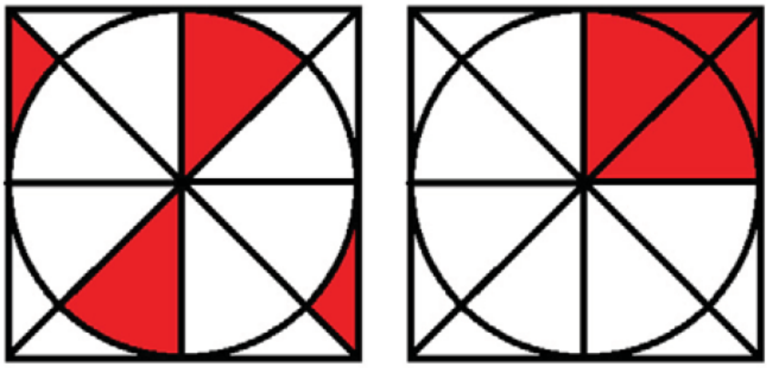
modrá. Až vytiahnutím 24. loptičky by sme získali modrú farbu. Ak chceme mať istotu, že medzi vytiahnutými budú loptičky všetkých troch farieb, musíme vybrať najmenej 24 loptičiek.

a) V košíku je 7 modrých loptičiek.

b) Ak chceme mať istotu, že medzi vytiahnutými bude žltá, zelená aj modrá loptička, musíme vybrať najmenej 24 loptičiek.

4. úloha – 7. roč. (2. úloha – 8. roč.)

Obraz je symetrický, jednotlivé časti sa v ňom opakujú vždy 8-krát, niekedy v bielej a niekedy v červenej farbe. Červené časti si môžeme vhodne premiestniť tak, ako je vidieť na obrázku.

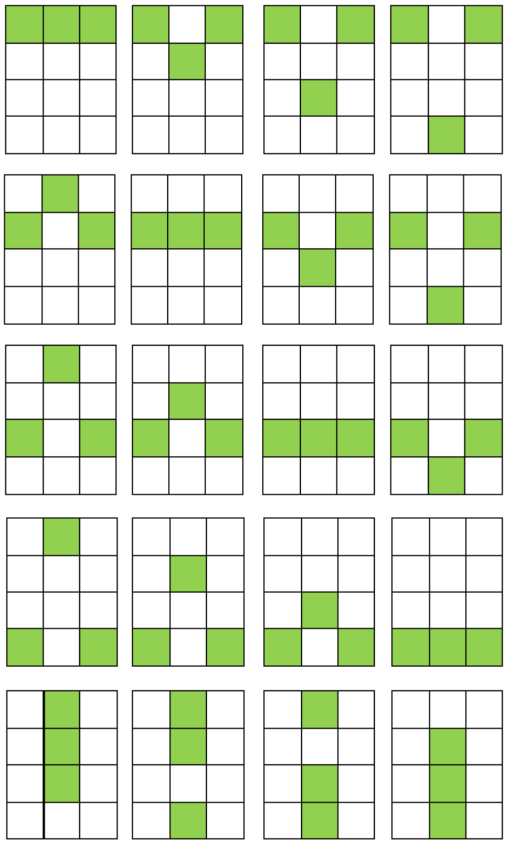


Obraz má tvar štvorca so stranou dlhou 1 m a obsah 1 m^2. Z obrázku je zrejmé, že červené časti tvoria jednu štvrtinu obrazu, teda 1:4 = 0,25 m^2 plochy.

Červená farby zaberá 0,25 m^2 (25 dm^2).

3. úloha – 8. roč. (1. úloha – 9. roč.)

Dvere majú zvnútra aj zvonku vyzerať rovnako. Keď sa na dvere dívame zvnútra a zvonku, vidíme sklá v ľavom a pravom stĺpci vymenené – sklá, ktoré sme zvonku videli na ľavej strane, vidíme zvnútra na pravej strane a naopak. Aby dvere z oboch pohľadov vyzerali rovnako, musia byť ozdobné sklá v pravom aj ľavom stĺpci umiestnené symetricky. Keďže ozdobné sklá sú tri, musia byť buď v ľavom aj v pravom stĺpci po jednom skle a v prostrednom stĺpci zvyšné sklo, alebo musia byť všetky tri ozdobné sklá v prostrednom stĺpci.



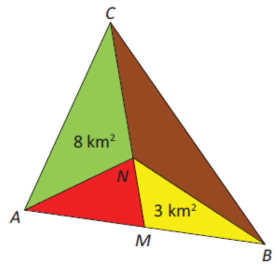
Ak sú v ľavom aj pravom stĺpci po jednom ozdobnom skle, musia byť obe umiestnené v tom istom riadku. Na polohe ozdobného skla v prostrednom stĺpci nezáleží. Teda ak sú obe krajné ozdobné sklá v hornom riadku, prostredné sklo môže byť v štyroch rôznych pozíciách. Ak sú krajné ozdobné sklá v druhom riadku, prostredné ozdobné sklo môže byť opäť v štyroch pozíciách atď. Celkovo je 4.4 = 16 takýchto možností.
Ak sú všetky tri ozdobné sklá v prostrednom stĺpci, len jedno zo štyroch skiel v prostrednom stĺpci je obyčajné. Existujú 4 možnosti, ktoré to bude.
Celkovo je 16 + 4 = 20 možností, ako môžu byť ozdobné sklá do dverí osadené.
Na obrázku sú všetky možné osadenia troch ozdobných skiel tak, aby bola podmienka splnená. Pre zjednodušenie sme presklenú časť dverí nahradili obdĺžnikom s rozmermi 3×4 sklenené tabuľky.
Je 20 možností, ako môže presklená časť dverí vyzerať.

4. úloha – 8. roč. (2. úloha – 9. roč.)

Dana kúpila tričko, darček a knihu. Za tretinu zvyšku zo sumy po nákupe darčeka kúpila knihu, ostali jej dve tretiny tejto sumy, podľa zadania 16 €. Ak 16 € sú dve tretiny nejakej sumy, tak jedna tretina je 16:2 = 8 € a teda pôvodná suma je 8.3 = 24 €.
Po nákupe darčeka mala teda Dana ešte 24 €. Po nákupe trička za tretinu zostávajúcej sumy kúpila darček, ostali jej dve tretiny tejto sumy. Ako sme zistili, ostalo jej 24 €, ktoré tvoria dve tretiny z danej sumy. Jedna tretina tejto sumy je teda 24:2 = 12 € a celá pôvodná suma je 12.3 = 36 €.
Po nákupe trička mala Dana ešte 36 €. Tričko si kúpila za tretinu svojich úspor, ostali jej dve tretiny úspor, čo je 36 €. Jedna tretina úspor je teda 36:2 = 18 € a pôvodná celková suma úspor bola 18.3 = 54 €.
Overme vypočítané čísla ešte raz. Dana mala úspory v hodnote 54 €. Za tretinu z nich, teda za 54:3 = 18 € si kúpila tričko, ostalo jej 54 – 18 = 36 €. Za tretinu zvyšku, teda za 36:3 = 12 € kúpila sestre darček, ostalo jej ešte 24 €. Za tretinu z tohto zvyšku, teda za 24:3 = 8 € si kúpila knihu a zostalo jej 24 – 8 = 16 €.
a) Tričko stálo 18 €.
b) Darček pre sestru stál 12 €.
c) Našetrených mala 54 €.

3. úloha – 9. roč.

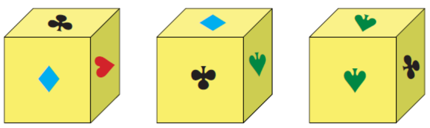
Bod M leží v strede úsečky AB, preto úsečky AM a MB sú rovnaké. Trojuholníky AMN a MBN majú rovnako dlhé strany (AM, MB) a rovnakú výšku (od vrcholu N), preto ich obsahy sú rovnaké. Trojuholníky AMN a MBN majú obsah 3 km^2. Trojuholníky AMC a MBC majú rovnako dlhé strany (AM, MB) a rovnakú výšku (od vrcholu C), preto ich obsahy sú rovnaké. Trojuholníky AMC a MBC majú obsah 3+8 = 11 km^2, teda trojuholník NBC musí mať 8 km^2. Pôvodný Trinov pozemok mal rozlohu 3+3+8+8 = 22 km^2.



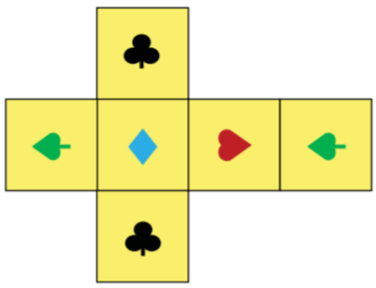
a) Remov červený pozemok mal rozlohu 3 km^2 (300 ha).

b) Pôvodný Trinov pozemok mal rozlohu 22 km^2.

4. úloha – 9. roč.



Na základe troch pohľadov na Petrovu kocku sa pokúsime určiť, koľko použil Peter nálepiek s každým znakom. Najlepšie sa nám bude úloha riešiť, keď si vyrobíme kocku z papiera a budeme na ňu kresliť znaky. Keď si na papierovú kocku nakreslíme prvý pohľad na ňu, otočením zistíme, že čierny znak nemôže byť ten istý, ktorý vidíme na treťom pohľade. Na kocke teda musí byť ešte aspoň jeden čierny znak. Zistíme, že tretí pohľad na kocku je „opakom“ prvého pohľadu, teda že vidíme presne tie tri steny, ktoré pri prvom pohľade nevidíme. Ľahko si ich teda dokreslíme na papierovú kocku na zvyšné tri voľné steny. Teraz už len skontrolujeme, že správnym natočením kocky dostaneme aj druhý pohľad na ňu. Peter použil dva čierne, dva zelené znaky, jeden červený a jeden modrý znak.



Pravdepodobnosť, že pri hode Petrovou kockou padne

a) ♥?
b) ♣?
c) ♠?

je a) 1/6, b) 2/6 = 1/3, c) 2/6 = 1/3.